13/07/24

1. Se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ medem o dobro de $\overline{BC}$, temos:

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$

$\overline{AD} = (5-0, 9-(-1))$

$(5, 10)$

Para facilitar o cálculo, vamos considerar $\overline{BC}$ vetor:

$2\vec{BC} + \vec{BC} + 2\vec{BC} = \vec{AD} \therefore 5\vec{BC} = (5, 10) \therefore \vec{BC} = (1, 2)^*$

*Esse resultado seria do primeiro segmento desse comprimento em $\overline{AD}$, ou seja, (1, 2) são as coordenadas de $1/2\ \overline{AB}$. Portanto:

$A + \overline{AB} = B \therefore (0, -1) + 2(1, 2) = B \therefore (0, -1) + (2, 4) = B \therefore$

$B = (2, 3)$. Utilizando B para descobrir C:

$B + \overline{BC} = C \therefore (2, 3) + (1, 2) = C \therefore C = (3, 5)$

↳ $1/2\ \overline{AB}$

□

2. Consideremos $A = (x, y)$, $B = (w, z)$ e $C = (p, q)$. Sendo M ponto médio de $\overline{AB}$, N de $\overline{BC}$ e P de $\overline{CA}$, obtemos as seguintes equações através da fórmula de ponto médio:

$\frac{(x+w,\ y+z)}{2} = (0, 3) \qquad \frac{(w+p,\ z+q)}{2} = (9, 2) \qquad \frac{(p+x,\ q+y)}{2} = (7, -1)$

Com essas equações, formamos dois sistemas:

I. $\begin{cases} x + w = 0 \cdot 2 \therefore x + w = 0 \\ w + p = 9 \cdot 2 \therefore w + p = 18 \\ p + x = 7 \cdot 2 \therefore p + x = 14 \end{cases}$

II. $\begin{cases} y + z = 3 \cdot 2 \therefore y + z = 6 \\ z + q = 2 \cdot 2 \therefore z + q = 4 \\ q + y = (-1) \cdot 2 \therefore q + y = -2 \end{cases}$

$w = -x$

$w + p = 18 \therefore -x + p = 18 \therefore p = 18 + x$

$p + x = 14 \therefore 18 + x + x = 14 \therefore 2x = -4$

$\boxed{x = -2}$

$w = -x \therefore w = -(-2) \therefore \boxed{w = 2}$

$p = 18 + x \therefore p = 18 - 2 \therefore \boxed{p = 16}$

$q = -2 - y$

$z + q = 4 \therefore z + (-2 - y) = 4 \therefore z - 2 - y = 4$

$z = 4 + 2 + y \therefore z = 6 + y$

$y + z = 6 \therefore y + 6 + y = 6 \therefore 2y = 0$

$\boxed{y = 0}$

$q = -2 - y \therefore q = -2 - 0 \therefore \boxed{q = -2}$

$z = 6 + y \therefore z = 6 + 0 \therefore \boxed{z = 6}$

Portanto, achamos os vértices $A = (-2, 0)$, $B = (2, 6)$ e $C = (16, -2)$.

□

spiral

13/07/24

$S_{\Delta ABC} = \frac{|\det K|}{2}$, onde $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 16 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Sendo assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 16 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}_{l_2 + 2 \cdot l_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 18 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} \overset{\text{Teo. Laplace}}{=} \begin{vmatrix} 4 & 18 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 4(-2) - 18 \cdot 6 = -8 - 108 = -116$$

Dessa forma, $S_{\Delta ABC} = \frac{|-116|}{2} = 116/2 = 58$ □

Para calcular o baricentro (que chamaremos de G), usaremos a seguinte fórmula:

$$G = \left(\frac{x + w + p}{3}, \frac{y + z + q}{3} \right) \therefore \quad G = \left(\frac{-2 + 2 + 16}{3}, \frac{0 + 6 + (-2)}{3} \right) \therefore$$

$$G = \left(\frac{16}{3}, \frac{6 - 2}{3} \right) \therefore \quad G = (16/3 ; 4/3)$$ □

3. A priori, verificaremos se $P \in r$. Para isso, substituiremos x e y da equação pelos respectivos do ponto P:

$3x + y = 17 \therefore 3 \cdot 1 + 1 = 17 \therefore 4 = 17 \rightarrow$ Absurdo! $P \notin r$

O ponto $A \in r$ mais próximo de P será sua projeção ortogonal em r. Para que uma reta v seja perpendicular à r, seus coeficientes angulares devem ser opostos e inversos:

$3x + y = 17 \therefore y = -3x + 17$ → Se o coeficiente angular de r é -3, o de v será $-(-1/3) = 1/3$. Portanto, sua equação da reta seria $y - 1 = 1/3 (x - 1)$ *

* $y - 1 = 1/3 (x - 1)$

$y - 1 = x/3 - 1/3$

$y = x/3 + 1 \therefore y = \frac{x - 1 + 3}{3} \therefore y = \frac{x + 2}{3}$

13/07/24

Com as duas equações, é possível montar um sistema para encontrar sua interseção, ou seja, o ponto A:

$$\begin{cases} y = -3x + 17 \\ y = x/3 + 2/3 \end{cases} \qquad -3x + 17 = \frac{x+2}{3} \quad \therefore \quad 3(-3x+17) = x+2$$

$$-9x + 51 = x + 2 \quad \therefore \quad 49 = 10x \quad \therefore \quad \boxed{x = 4,9}$$

$$y = \frac{x+2}{3} \quad \therefore \quad y = \frac{4,9+2}{3} \quad \therefore \quad y = \frac{6,9}{3} \quad \therefore \quad \boxed{y = 2,3}$$

□

Portanto, $A = (4,9 ; 2,3)$

4. A base é ortogonal, pois $\vec{v} \perp \vec{v}$. Para que ela seja ortonormal, suas coordenadas devem ser unitárias. Por serem perpendiculares, $\|\vec{v} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$, e sabemos que $\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\| = \sqrt{2}/2$, logo:

$$\|\vec{v} + \vec{v}\|^2 = (\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^2 \quad \therefore \quad \|\vec{v} + \vec{v}\|^2 = 1/2 + 1/2 \quad \therefore \quad \|\vec{v} + \vec{v}\|^2 = 1 \quad \therefore$$

$$\sqrt{\|\vec{v} + \vec{v}\|^2} = \sqrt{1} \quad \therefore \quad \|\vec{v} + \vec{v}\| = 1$$

□

Com isso, sabemos que a primeira coordenada da base é unitária. Para descobrir sobre a segunda, vamos considerar $\vec{v} = (x, y)$ e $\vec{v} = (w, z)$. Sendo assim:

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \quad \therefore \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{w^2+z^2} = \sqrt{2}/2 \quad \therefore \quad \sqrt{x^2+y^2}^2 = \sqrt{w^2+z^2}^2 = (\sqrt{2}/2)^2 \quad \therefore$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = w^2 + z^2 = 1/2} \; *$$

$$\|\vec{v} - \vec{v}\| = \sqrt{(x-w)^2 + (y-z)^2} \quad \overset{\text{Produtos notáveis}}{\longleftrightarrow} \quad \|\vec{v} - \vec{v}\| = \sqrt{x^2 - 2xw + w^2 + y^2 - 2yz + z^2} =$$

$$\sqrt{x^2+y^2+w^2+z^2-2xw-2yz} \quad \overset{*}{=} \quad \sqrt{1/2 + 1/2 - 2xw - 2yz} = \sqrt{1 - 2xw - 2yz}$$

** $\|\vec{v} - \vec{v}\| = \sqrt{1 - 0} \quad \therefore \quad \|\vec{v} - \vec{v}\| = \sqrt{1} \quad \therefore$

$\|\vec{v} - \vec{v}\| = 1$

** O produto escalar de vetores ortogonais sempre será 0, portanto:
$\vec{v} \cdot \vec{v} = xw + yz = 0$

Dessa forma, a base é ortonormal.

□

spiral